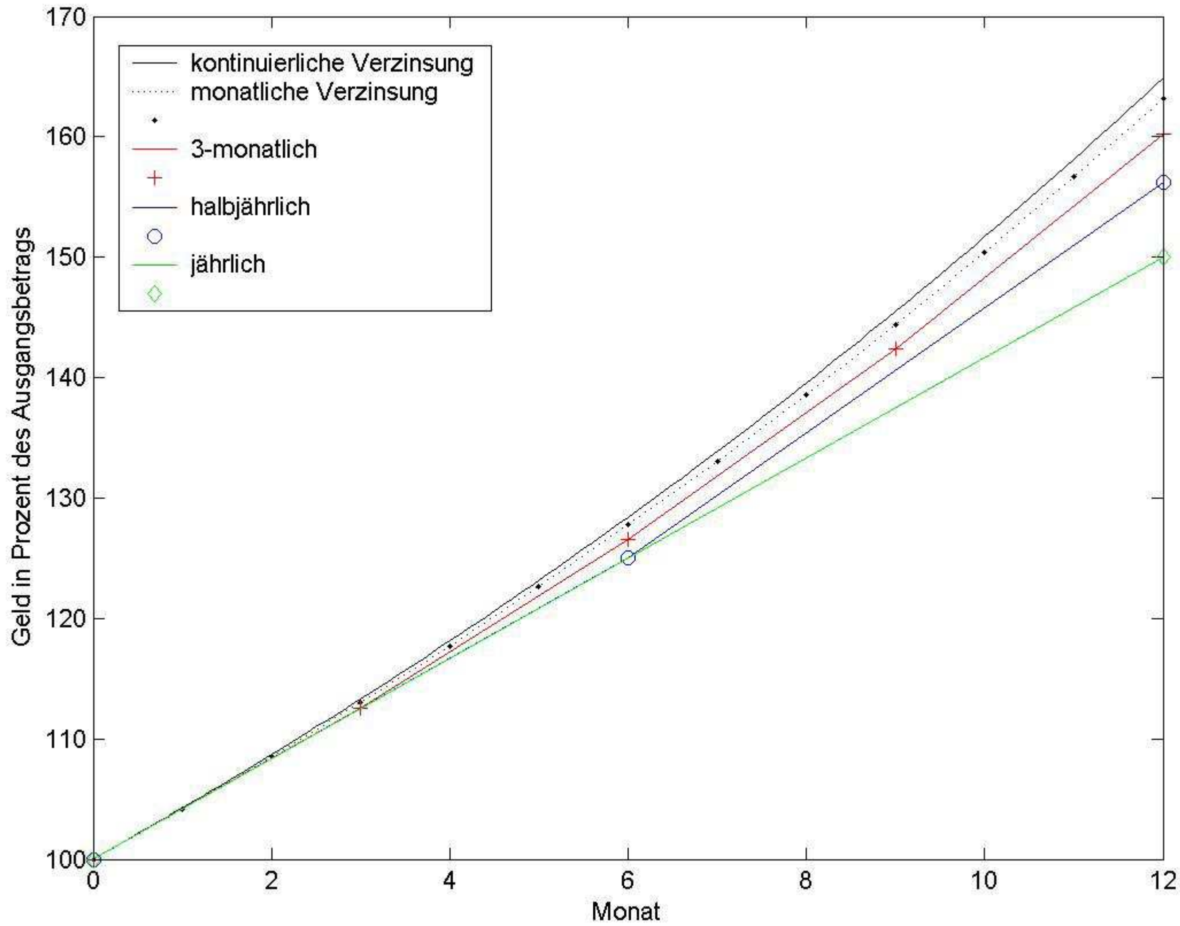
Zins und Zinseszins: Beispiel: 50% pro Jahr, $x = 0.5$

Unterschiedliche Modelle:

- jährliche Verzinsung, $n = 1$ mal (pro Jahr)
- halbjährliche Verzinsung, $n = 2$ mal mit $x/2$
- 3-monatliche Verzinsung, $n = 4$ mal mit $x/4$
- monatliche Verzinsung, $n = 12$ mal mit $x/12$
- ...

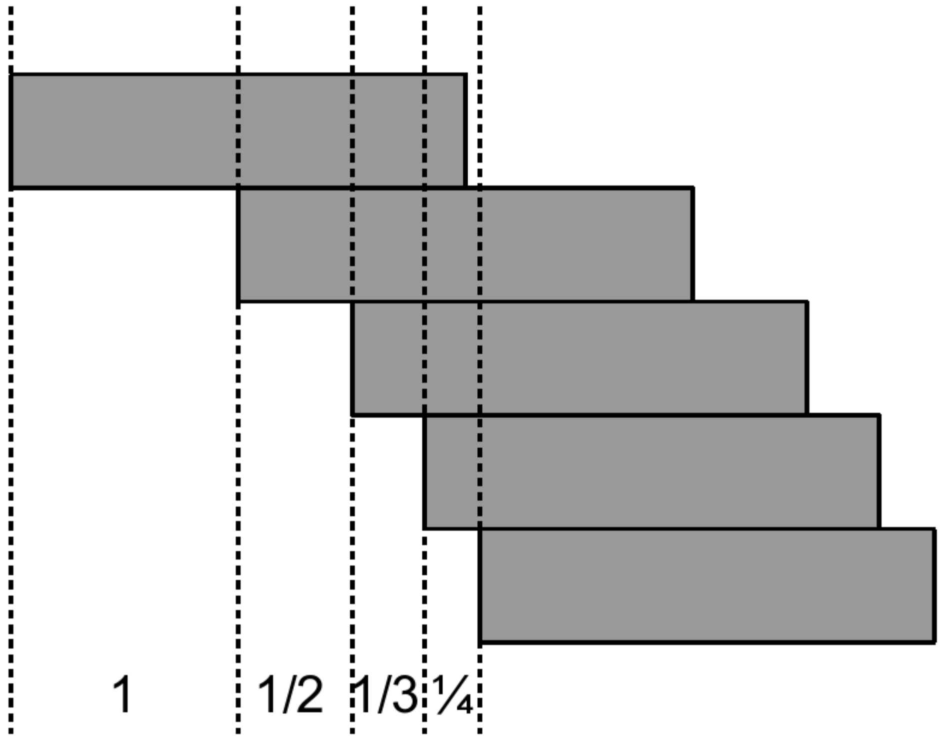
$$a_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$



$$\lim_{n\to\infty} a_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = e^x$$

Beispiel für Reihen: Bauklötze

Welchen Überhang kann ein Turm maximal haben, ohne umzustürzen?

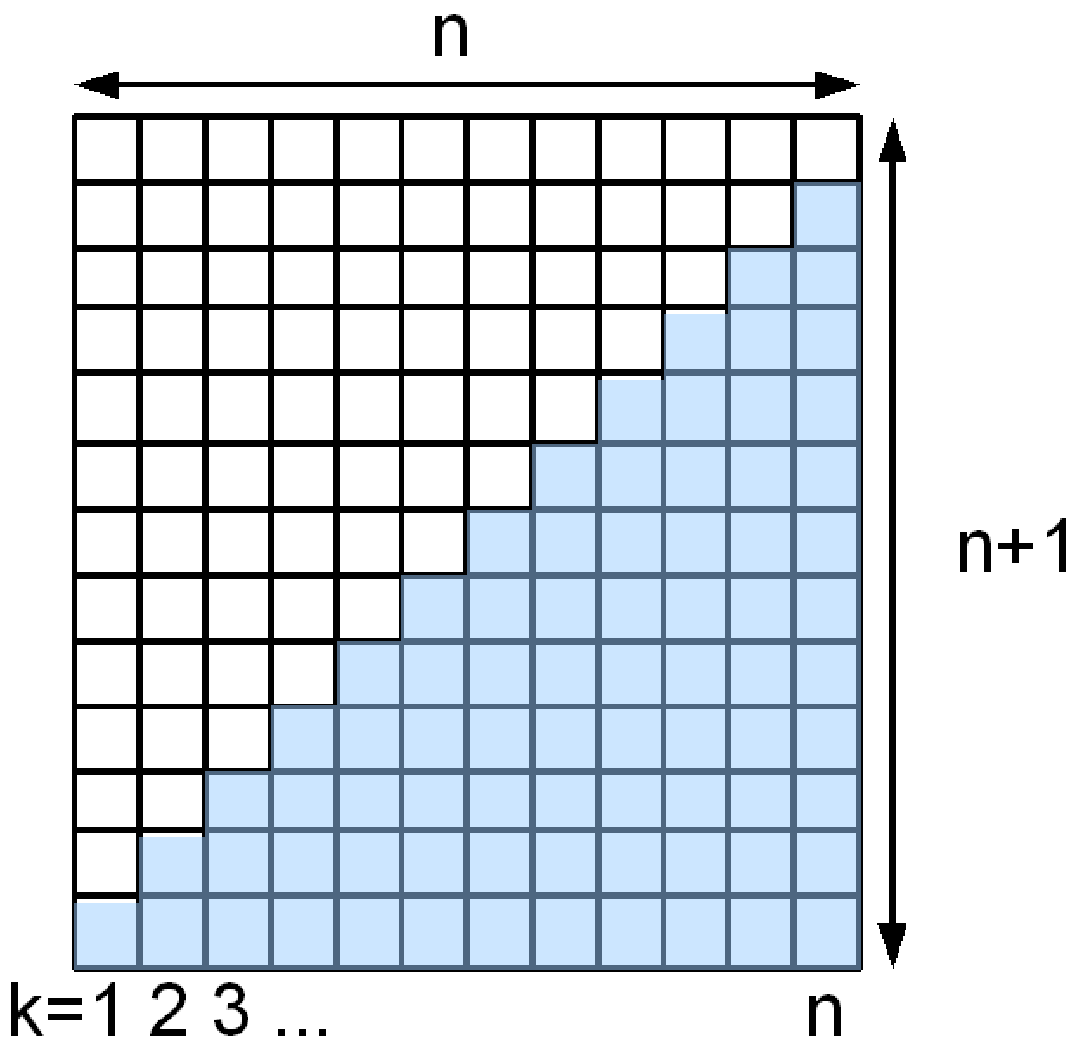


$$x_1 = 1,\ \ x_2 = \frac{1}{2},\ \ x_3 = \frac{1}{3},\ \ x_4 = \frac{1}{4},\ \ \ldots\ ,\ \ x_n = \frac{1}{n}$$

$$s_n = \sum_{m=0}^{n} x_m, \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = ?, \qquad \lim_{n\to\infty} s_n = ?$$

Beispiel für Reihen: Gauß

$$\sum_{k=1}^{n} k \ = \ ?$$



$$\sum_{k=1}^{n} k \ = \ \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$$

Wiederholung Kapitel 5 (Reihen)

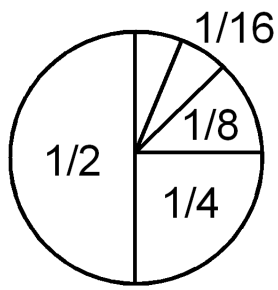
<u>Reihe:</u> Folge von Teilsummen einer Folge

$$s_n = \sum_{m=1}^{n} x_m \quad \rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} x_m = \sum_{m=1}^{\infty} x_m$$

<u>Beispiel:</u> Kuchenstücke

$$x_m = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$$

$$s_n = \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \ldots$$



$$\Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^m = 1, \quad \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^m = 2$$

<u>Geometrische Reihe:</u>

$$\sum_{m=0}^{\infty} q^m = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{n} q^m =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} \quad \forall \ |q|<1$$

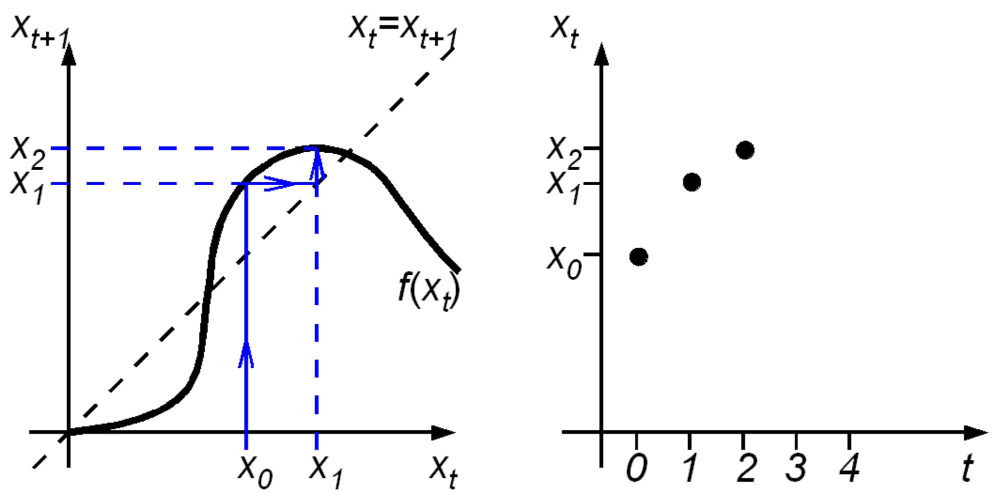
<u>Exponentialreihe:</u>

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\ldots = e$$

Modellierung mit Iterierten Abbildungen 1. Ordnung

Dynamik $x_{t+1} = f(x_t)$ und Anfangswert x_0

=> Lösung: <u>Folge</u> $(x_0, x_1, x_2, ...)$



<u>Änderung von t zu $t+1$:</u>

$f(x_t) > x_t \iff x_{t+1} > x_t$ Wachstum

$f(x_t) < x_t \iff x_{t+1} < x_t$ Abnahme

$f(x_t) = x_t \iff x_{t+1} = x_t$ Fixpunkt (stabil oder instabil ?)

<u>Fragestellungen (Mathe-Skript, S.72/73):</u>

1. Allgemeine Lösung:
   Welche Lösungen existieren überhaupt?
2. Anfangswertproblem:
   x_0 gegeben => spezielle Lösung?
3. Langzeitverhalten: $\lim_{n\to\infty}(x_t) = ?$
   (Divergenz, Konvergenz, Oszillation)
4. Existieren Fixpunktlösungen? (Stabilität)

Annahmen bei der Modellierung
mit Iterierten Abbildungen 1. Ordnung

Dynamik $x_{t+1} = f(x_t)$ und Anfangswert x_0

<u>Modellannahmen (Mathe-Skript, S. 70)</u>

1. Keine *explizite* Zeitabhängigkeit von *f*.
   (Eine explizite Zeitabhängigkeit wäre $x_{t+1} = f(x_t, t)$,
   also z. B. $f(x_t, t) = x_t + \delta t$.
   Beispiel „Holzschlag“: keine Erderwärmung)

2. Eindimensionaler Zustand des Systems: x_t .
   (Beispiel „Holzschlag“: kein Borkenkäfer)

3. Zeit *t* ist diskret (d. h. nicht kontinuierlich).

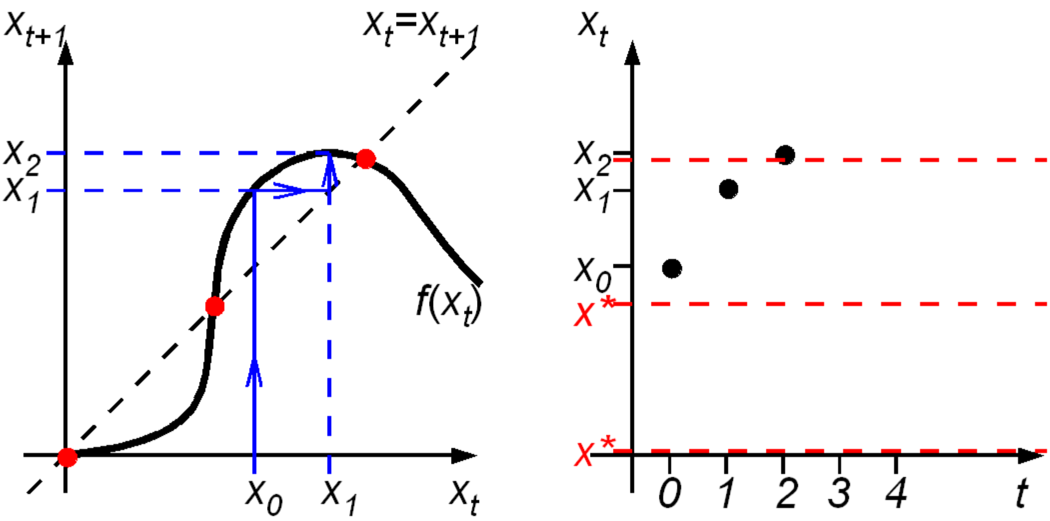
4. Kein „Gedächtnis“ über einen Zeitschritt hinaus, also
   It. Abbildung 1. Ordnung.
   (2. Ordnung wäre $x_{t+1} = f(x_t, x_{t-1})$)

5. Dynamik ist deterministisch (keine zufälligen
   Fluktuationen).

Wiederholung Kapitel 6/7 (Iterierte Abbildungen)

Biologische Systeme = Dynamische Systeme.
Beschreibung durch:

- Differentialgleichungen: $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x)$ (Kap. 13, 14)
- Iterierte Abb. (rekursive Folgen) $x_{t+1} = f(x_t)$



$$f(x_t) > x_t \quad \Leftrightarrow \quad x_{t+1} > x_t \quad \text{Wachstum}$$
$$f(x_t) < x_t \quad \Leftrightarrow \quad x_{t+1} < x_t \quad \text{Abnahme}$$
$$f(x_t) = x_t \quad \Leftrightarrow \quad x_{t+1} = x_t \quad \text{Fixpunkt}$$

<u>Fixpunkt:</u>

Bedingung an Iterationsfunktion: $f(x^*) = x^*$

- Fixpunkt „asymptotisch stabil“ für $|f'(x^*)| < 1$
- Fixpunkt „instabil“ für $|f'(x^*)| > 1$

<u>Lin. Iterierte Abbildung 1. Ordnung:</u> $x_{t+1} = a\ x_t + b$

- $b = 0$: „homogen“
- $b \neq 0$: „inhomogen“

Allgemeine Lösung ($c \in \mathbb{R}$ beliebig):

- Homogener Fall: $\left(c\ a^t\right)_{t \in \mathbb{N}_0}$
- Inhomogener Fall: $\left(c\ a^t + \frac{b}{1-a}\right)_{t \in \mathbb{N}_0}$

Spezielle Lösung des inhomogenen Falls (bestimmtes x_0):
z. B. Fixpunktlösung

$$x_0 = \frac{b}{1-a} \Rightarrow x_t = \frac{b}{1-a} \quad \forall \ t \ \text{ für } \ a \neq 1$$

Wichtig!: Aus der Kenntnis

- der allg. Lsg. der hom. It. Abb.: $h_t = a^t c$ (*c* beliebig)
- und <u>einer</u> spez. Lsg. der inhom. It. Abb.,
  z. B. $i_t = \frac{b}{1-a}$ (Fixpunktlösung),

folgt die *allgemeine* Lsg. der inhom. It. Abb.: $z_t = h_t + i_t$.

Für eine *spezielle* Lösung:
wähle die Konstante *c* so, dass $z_0 = x_0$.

Kurvendiskussion (Funktion *f*)

1. Definitionsbereich, Singularität(en), Symmetrie(n), Periodizität
2. Nullstellen: Lösung von $f(x) = 0$
3. Asymptotisches Verhalten
   - Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs
   - $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = ?$
4. Stetigkeit (Sprünge?)
5. Differenzierbarkeit:
   Berechne ggfs. $f'(x)$, $f''(x)$, evtl. $f'''(x)$
6. Monotonie (monoton wachsend/fallend): Für diff.bare *f*, finde Bereiche mit $f'(x)>0$ und $f'(x)<0$
7. Extrema
   - lokal: Lösung von $f'(x) = 0 \Rightarrow$ Extremum $x_0, \ldots$
     - $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ Minimum bei x_0
     - $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ Maximum bei x_0
   - global: größtes Maximum und kleinstes Mimimum. Betrachte auch Ränder des Definitionsbereichs!
8. Krümmung
   - $f''(x) > 0$ konvex
   - $f''(x) < 0$ konkav
   - $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$ Wendepunkt
9. Graphische Darstellung (evtl. Wertetabelle)
10. Taylor-Entwicklung:
    $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + f''(x_0)/2\cdot(x-x_0)^2 + \ldots$

Wiederholung Kapitel 9 (Differentiation)

Ableitung von Funktion und Umkehrfunktion:

$$f'(x_0) = \frac{1}{(f^{-1})'\left(f(x_0)\right)}$$

Kettenregel:

$$h(x) = g\left(f(x)\right) \;\Rightarrow\; h'(x) = g'\left(f(x)\right) \cdot f'(x)$$

Wichtige Ableitungen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(x^r\right) = r \cdot x^{r-1} \quad \text{für} \quad r \neq 0, \quad x > 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(a^x\right) = \ln(a) \cdot a^x \quad \text{für} \quad a > 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\left(\log_a(x)\right) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \frac{1}{x} \quad \text{für} \quad a > 0, \quad x > 0$$

Taylor-Entwicklung:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x - x_0)^k}{k!} \cdot \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\,x^k} f(x_0)$$

$$\text{z. B.} \quad \mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots \quad \text{für} \quad x_0 = 0$$

Regel von de l'Hospital für differenzierbare Funktionen g und h:

$$\text{Für } g(x_0) = h(x_0) = 0, \quad h'(x_0) \neq 0 \quad \text{gilt:}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{g'(x)}{h'(x)}$$

Komplexe Exponentialfunktion

$z = x + i \cdot y \in \mathbb{C}; \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}$

Taylor − Entwicklung wie bisher:

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \frac{z^5}{120} + \frac{z^6}{720} + \ldots$$

Potenzgesetz:

$$\exp(z) = \exp(x + i\,y) = \exp(x) \cdot \exp(i\,y)$$

Betrachte $\exp(i\,y)$:

$$\begin{aligned}
\exp(iy) &= 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2} + \frac{(iy)^3}{6} + \frac{(iy)^4}{24} + \frac{(iy)^5}{120} + \frac{(iy)^6}{720} + \ldots \\
&= 1 + iy - \frac{y^2}{2} - i\frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{24} + i\frac{y^5}{120} - \frac{y^6}{720} - \ldots \\
\cos(y) &= 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} - \frac{y^6}{720} + \ldots \\
i\sin(y) &= +iy - i\frac{y^3}{6} + i\frac{y^5}{120} - \ldots
\end{aligned}$$

$$\boxed{\Rightarrow \; \exp(i \cdot y) = \cos(y) + i \cdot \sin(y)}$$

für $y \in \mathbb{R}$

Additionstheoreme

$$\exp[i(\phi_1+\phi_2)] = ?$$

Einerseits:

$$\exp[i(\phi_1+\phi_2)] = \underbrace{\cos(\phi_1+\phi_2)}_{\text{Realteil}} + \underbrace{i\cdot\sin(\phi_1+\phi_2)}_{\text{Imaginärteil}}$$

Andererseits:

$$\exp[i(\phi_1+\phi_2)] = \exp[i\phi_1]\cdot\exp[i\phi_2] =$$

$$= [\cos(\phi_1)+i\cdot\sin(\phi_1)]\cdot[\cos(\phi_2)+i\cdot\sin(\phi_2)] =$$

$$= \underbrace{\cos(\phi_1)\cdot\cos(\phi_2)-\sin(\phi_1)\cdot\sin(\phi_2)}_{\text{Realteil}}$$

$$+\underbrace{i\cdot[\sin(\phi_1)\cdot\cos(\phi_2)+\cos(\phi_1)\cdot\sin(\phi_2)]}_{\text{Imaginärteil}}$$

Vergleich der beiden Realteile:

$$\cos[(\phi_1+\phi_2)] = \cos(\phi_1)\cdot\cos(\phi_2)-\sin(\phi_1)\cdot\sin(\phi_2)$$

Vergleich der beiden Imaginärteile:

$$\sin(\phi_1+\phi_2) = \sin(\phi_1)\cdot\cos(\phi_2)+\cos(\phi_1)\cdot\sin(\phi_2)$$

Wiederholung Kapitel 11 (Komplexe Zahlen)

$$\boxed{\text{Imaginäre Einheit} \quad i = \sqrt{(-1)} \in \mathbb{C}}$$

Darstellung:

<u>Kartesische Koordinaten</u>

$z = x + i \cdot y \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$

$x = \mathrm{Re}(z)$ Realteil von z

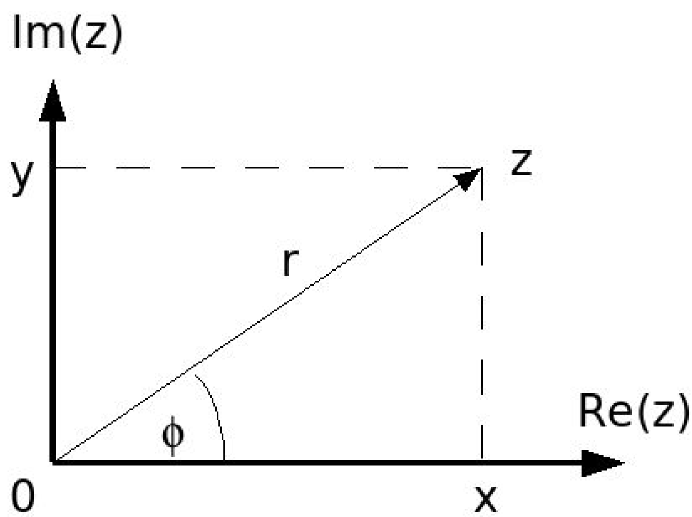
$y = \mathrm{Im}(z)$ Imaginärteil von z

<u>Polar–Koordinaten</u>

$z = r \cdot (\cos\phi + i \cdot \sin\phi) = r \cdot \exp(i \cdot \phi)$ mit $r \in \mathbb{R}_0^+$ und $\phi \in \mathbb{R}$

$r = |z|$ Betrag (Länge) von z

$\phi = \arg(z)$ Argument (Winkel) von z



Umrechnung:

$r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$

$\phi = \arctan(y/x)$

$x = r \cdot \cos(\phi)$

$y = r \cdot \sin(\phi)$

Rechenoperationen mit Komplexen Zahlen

$$z = x + i \cdot y = r \cdot \exp(i \cdot \phi)$$
$$z_1 = x_1 + i \cdot y_1 = r_1 \cdot \exp(i \cdot \phi_1)$$
$$z_2 = x_2 + i \cdot y_2 = r_2 \cdot \exp(i \cdot \phi_2)$$

<u>Addition/Subtraktion:</u> $z_1 \mp z_2 = (x_1 \mp x_2) + i \cdot (y_1 \mp y_2)$

<u>Multiplikation:</u> $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot \exp[i \cdot (\phi_1 + \phi_2)]$

<u>Division:</u> $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} \cdot \exp[i \cdot (\phi_1 - \phi_2)]$

<u>n − te Potenz:</u> $z^n = r^n \cdot \exp(i \cdot n \cdot \phi)$ (Moivresche Formel)

<u>n − te Wurzel:</u> $\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} \cdot \exp\left[\dfrac{i \cdot \phi + 2\pi k}{n}\right]$

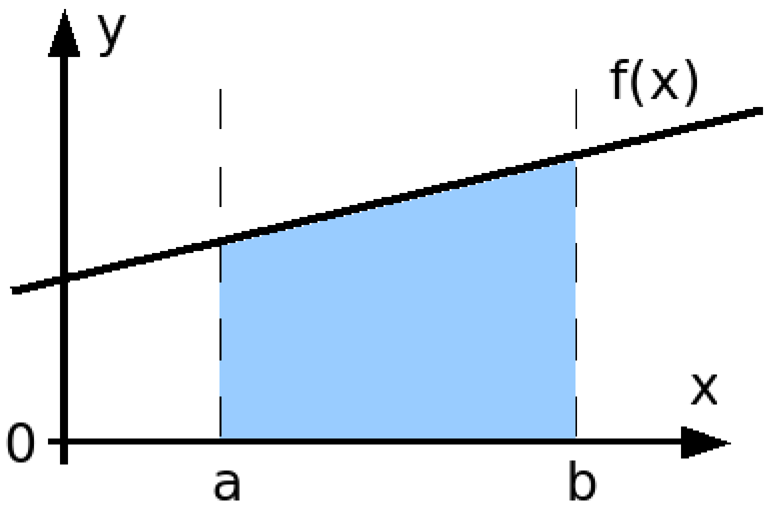
mit $k \in \mathbb{Z}$ (n verschiedene Wurzeln)

<u>Konjugation:</u> $\bar{z} = x - i \cdot y = r \cdot \exp(-i \cdot \phi)$

Wiederholung Kapitel 12 (Integralrechung)

$$\text{Bestimmtes Intergral (Fläche) } I_f$$

$$\text{einer beschränkten Funktion } f: \quad I_f(a,b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



$$\text{Wichtige Rechenregeln :}$$

$$\int_a^b \alpha \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Zur Berechnung eines bestimmten Integrals von f genügt die Kenntnis einer Stammfunktion F von f

$$\boxed{\begin{array}{c}F \text{ ist Stammfunktion von } f \text{, falls} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} F(x) = f(x)\end{array}}$$

Beispiele:

$$f(x) = x^n \qquad \Rightarrow \qquad F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

$$f(x) = \exp(a \cdot x) \qquad \Rightarrow \qquad F(x) = \frac{1}{a} \exp(a \cdot x)$$

$$f(x) = \sin(a \cdot x) \qquad \Rightarrow \qquad F(x) = -\frac{1}{a} \cos(a \cdot x)$$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = F(b) - F(a)}$$

Regeln zur Berechnung von Integralen

Partielle Integration:

$$\int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x = \left[f(x)\cdot g(x)\right]_a^b - \int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$$

Substitution:

$$\int_a^b g(f(x))\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{f(a)}^{f(b)} g(u)\,\mathrm{d}u$$