INSTITUT FÜR BIOLOGIE
HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INVALIDENSTRASSE 43
10115 BERLIN

TELEFON: 030-2093-9112
FAX: 030-2093-8801
E-MAIL: ITB@BIOLOGIE.HU-BERLIN.DE
HTTP://ITB.BIOLOGIE.HU-BERLIN.DE/

Mathematik für Biologen II — 1.Übung — zur Vorlesung vom 20.4.1999

1) Werten Sie die folgenden Integrale aus:

(a) $\int_1^2 x^5\,dx$
(b) $\int_a^b cx^n\,dx$, für $n>0$
(c) $\int_a^b (cx)^n\,dx$, für $n>0$
(d) $\int_0^1 (x^3+\frac{1}{2}\sqrt{x})\,dx$
(e) $\int_1^3 \frac{1}{x^2}\,dx$
(f) $\int_0^1 (x-1)^4\,dx$
(g) $\int_{-\infty}^0 \exp(x)\,dx$
(h) $\int_{-1}^1 (x^4-x^2)\,dx$
(i) $\int_{-1}^1 (x^3-x)\,dx$
(j) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(x)\,dx$
(k) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\omega t)\,dt$
(l) $\int_a^b \operatorname{sgn}(x)\,dx$

2) Sei $f(x)$ eine gerade und $g(x)$ eine ungerade Funktion. Zeigen Sie:

(a) $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ für alle reellen a.
(b) $\int_{-a}^a g(x)\,dx = 0$ für alle reellen a.
(c) Was folgern Sie daraus für $\int_{-a}^a f(x)g(x)\,dx$?

3) Berechnen Sie den Mittelwert der Funktion $f(x)=2x-x^3$

(a) auf dem Intervall $[1,4]$,
(b) auf dem Intervall $[-5,5]$,
(c) über alle reellen Zahlen. Hinweis: Berechnen Sie zunächst den Mittelwert auf einem Intervall $[-c,c]$ und lassen Sie dann c gegen unendlich gehen.

4) Berechnen Sie das Volumen einer Kugel mit Radius R. Gehen Sie dazu wie in Beispiel 6 von Kapitel 12.6 skizziert vor und veranschaulichen Sie sich die Methode, indem Sie einige der Schnittflächen, über die integriert wird, in eine Kugel zeichnen.

5) Berechnen Sie eine Stammfunktion zu $f(x) = \dfrac{1+3x+3x^2}{1+2x+2x^2+x^3}$.

Überzeugen Sie sich zuerst einmal davon, dass $f(x)$ vereinfacht werden kann zu

$$f(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1+x+x^2} \ .$$

Den ersten Term können Sie nun direkt integrieren, für den zweiten verwenden Sie beispielsweise die Formel

$$\int \frac{bx+c}{x^2+px+q}\,dx = \frac{b}{2}\ln(q+px+x^2) + \frac{2(c-\frac{bp}{2})}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2(\frac{p}{2}+x)}{\sqrt{4q-p^2}} \qquad \text{für } 4q \geq p^2 \ .$$

(Eine kurze Erläuterung zur hier verwendeten Partialbruchzerlegung finden Sie umseitig.)