

INSTITUT FÜR BIOLOGIE
 HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
 INVALIDENSTRASSE 43
 10115 BERLIN

TELEFON: 030-2093-9112
 FAX: 030-2093-8801
 E-MAIL: ITB@BIOLOGIE.HU-BERLIN.DE
 HTTP://ITB.BIOLOGIE.HU-BERLIN.DE/

Mathematik für Biologen II — 2.Übung — zur Vorlesung vom 27.4.1999

1) Zur Substitutionsregel: Werten Sie folgende Integrale aus:

(a) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ (Tip: Setzen Sie $x = \sin(y)$)

(b) $\int_0^{\pi/2} \cos(x) \sin^2(x) dx$ (Tip: Setzen Sie $u = \sin(x)$)

(c) $\int_1^\infty \frac{\exp(-\frac{x}{1+x})}{(1+x)^2} dx$

2) Berechnen Sie das Integral $\int_a^b [\sin(x)]^2 dx$

(a) mit Hilfe der partiellen Integration,

(b) indem Sie zuerst aus der Moivreschen Formel und dem Satz des Pythagoras die Beziehung $\sin^2(x) = \frac{1}{2}[1 - \cos(2x)]$ herleiten und damit den Integranden vereinfachen.

Aus Ihrem Ergebnis folgt insbesondere

$$\int_0^{k\frac{\pi}{2}} [\sin(x)]^2 dx = \int_0^{k\frac{\pi}{2}} [\cos(x)]^2 dx = k\frac{\pi}{4} .$$

Veranschaulichen Sie sich dieses Resultat graphisch.

3) Ein Medikament wird einem Patienten mit konstanter Rate r (in Gramm/Sekunde) über eine Infusion zugeführt. Gleichzeitig wird es vom Körper proportional der vorhandenen Menge $x(t)$ mit Proportionalitätskonstante α abgebaut.

(a) Stellen Sie eine Differentialgleichung $\dot{x} = f[x(t)]$ für $x(t)$ auf.

(b) Skizzieren Sie $f(x)$.

(c) Welche Fixpunkte hat die Differentialgleichung?

(d) Diskutieren Sie ihre Stabilität (lineare Stabilitätsanalyse).

(e) Lösen Sie die Differentialgleichung zunächst für beliebige Anfangswerte $x(t = 0) = x_0$ durch Trennung der Variablen und zeichnen Sie dann $x(t)$ für die speziellen Anfangswerte (i) $x_0 = 0$, (ii) $x_0 = \frac{r}{\alpha}$, (iii) $x_0 = 2\frac{r}{\alpha}$.

(f) Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit denen von Blatt 3 Aufgabe 1 des Wintersemesters. Was war dort anders, was war gleich?

4) Aus dem Wintersemester kennen Sie die **logistische Differentialgleichung**

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 \quad (1)$$

als Modell für eine Population mit begrenztem Wachstum. Lösen Sie nun die Gleichung (1) für beliebige Anfangspopulationen, d.h. zur Zeit t_0 sei $x(t_0) = x_0$. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Formen Sie die Gleichung durch Trennung der Variablen in einen Integralausdruck um.

(b) Berechnen Sie das Integral über x mit Hilfe der Substitution $y = 1/x$. Was erhalten Sie damit letztendlich für $x(t)$?

(c) Diskutieren Sie die Funktion

$$x(t) = \frac{a}{b - \left(b - \frac{a}{x_0}\right) \exp[-a(t - t_0)]} \quad (2)$$

für Zeiten $t \geq t_0$. Was ergibt sich im Grenzfall $b = 0$?

5)* Zeigen Sie durch partielle Integration, dass die **Gammafunktion**

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^t e^{-x} dx, \quad t > -1$$

der Gleichung $\Gamma(t) = t \Gamma(t - 1)$, $t > 0$ genügt und somit eine Verallgemeinerung des Fakultätsbegriffes auf reelle Zahlen $t > -1$ ermöglicht. Berechnen Sie $\Gamma(n)$ für $n \in \{0, 1, 2\}$ explizit.

6)* Versuchen Sie sich den nebenstehenden Abschnitt zur mehrdimensionalen Integration zu veranschaulichen, indem Sie zunächst die Fläche, die durch die Grenzen $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ und $y = x^2$ gegeben ist, berechnen.

Es könnte dabei der Eindruck entstanden sein, dass sich der mehrdimensionale Ansatz nicht von der Ihnen bereits vertrauten Methode zur Berechnung der Fläche unter einer Funktion unterscheidet. Stellen Sie sich aber nun vor, diese Fläche sei mit Materie belegt, und die Dichte dieser Materie variere wie $\rho(x, y) = 1 + x + y$. Um nun die Masse dieses Körpers zu berechnen, benötigen Sie den hier vorgestellten, mächtigeren Ansatz. Was also ist die Masse des hier betrachteten Körpers? (148/15)