HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN

INSTITUT FÜR MATHEMATIK

INNOVATIONSKOLLEG THEORETISCHE BIOLOGIE

Mathematik für Biologen II — SoSe 99 — 1. Klausur — Gruppe B

NAME: .... MATR.NR.: .... TUTOR: ....

	1a	1b	1c	2a	2b	3	4a	4b	4c	4d	5a	5b	5c	6a	6b	7a	7b	$\sum_1^7$
P max	1	1	1	3	3	5	4	4	2	2	2	2	2	2	5	2	3	44
P																		

	8a	8b	9	$\sum_8^9$	$\sum_1^9$
P max	2	2	6	10	54
P					

Die in den Zusatzaufgaben erzielten Punkte werden zusätzlich angerechnet.

VIEL ERFOLG!

---

1. Aufgabe [3 Punkte]: Berechnen und vereinfachen Sie soweit möglich:

(a) [1 P] $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(b) [1 P] $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c) [1 P] $\int_0^{\pi/2} [x^4 - \cos(2x)] dx$

2. Aufgabe (Integration) [6 Punkte]: Berechnen und vereinfachen Sie soweit möglich:

(a) [3P] $\int_0^{\infty} x\, e^{-x}\, dx$ (Tip: partielle Integration).

(b) [3P] $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \frac{x \cos(x^2)}{1 + \sin(x^2)}\, dx$ (Tip: Substituieren Sie $u = 1 + \sin(x^2)$).

3. Aufgabe (Gaußelemination) [5 Punkte]:

Lösen Sie mittels Gaußelemination das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 8x_3 & - & x_4 & = & 10 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 9 \end{array}$$

Was stellt Ihre Lösung geometrisch dar?

4. Aufgabe 4 (Eigenwerte und Eigenvektoren) [12 Punkte]:

Sei $\mathbf{A} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -10 & -1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(a) [4 P] Bestimmen Sie die beiden Eigenwerte von $\mathbf{A}$.

(b) [4 P] Bestimmen Sie die zugehörigen normierten Eigenvektoren von $\mathbf{A}$.

(c) [2 P] Bilden Sie die zu $\mathbf{P}$ inverse Matrix $\mathbf{P}^{-1}$ und berechnen Sie zur Probe $\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}$.

(d) [2 P] Berechnen Sie nun $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$.

5. Aufgabe (Extremwerte) [6 Punkte]:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ mit $f(x, y) = 20 - 12x - 3y + x^3 + y^3$.

(a) [2 P] Berechnen Sie den Gradienten und die Hessematrix von f als Funktion von x und y.

(b) [2 P] Bestimmen Sie alle stationären Punkte von f.

(c) [2 P] Klassifizieren Sie die stationären Punkte, d.h. welcher dieser Punkte ist ein lokales Maximum, Minimum oder Sattelpunkt?

6. Aufgabe (Differentialgleichung) [7 Punkte]:

Der Luftdruck p nimmt bekanntermaßen mit der Höhe h über der Erdoberfläche ab (es ist also $p = p(h)$) wobei gilt

$$\frac{dp(h)}{dh} = -\beta \frac{p(h)}{T(h)} . \tag{1}$$

Hierbei bezeichnet $T(h)$ die höhenabhängige Temperatur.

(a) [2 P] Bestimmen Sie $p(h)$ aus (1) für den Fall, dass T nicht von der Höhe h abhängt; setzen Sie also $T(h) = T_0 =$ konstant. Der Druck in der Höhe $h_0 = 0$ sei p_0.

(b) [5 P] Lösen Sie (1) durch Trennung der Variablen für den Fall, dass $T(h) = T_0 - \alpha(h - h_0) > 0$. Wiederum sei $p(h_0) = p_0$ für $h_0 = 0$.

7. Aufgabe (Cramersche Regel) [5 Punkte]: Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & -3 \\ x_1 & + & \lambda x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 & = & 2 \end{array}$$

(a) [2 P]: Unter welcher Bedingung an $\lambda \in \mathbf{R}$ hat das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung? (Tip: Cramersche Regel)

(b) [3 P]: Bestimmen Sie unter dieser Bedingung die eindeutige Lösung in Abhängigkeit von λ.

Zusatzaufgaben

8. Aufgabe (Divergenz) [4 Punkte]:

Eine Funktion $\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$ von $\mathbf{R^2} \to \mathbf{R^2}$ ordnet jedem Punkt (x,y) einen Vektor $\vec{f}$ zu und wird daher Vektorfeld genannt. Unter der Divergenz eines Vektorfeldes versteht man das skalare Feld

$$\mathrm{div}\vec{f}(x,y) = \nabla\vec{f}(x,y) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)\ .$$

(a) [2 P] Berechnen Sie die Divergenz des Vektorfeldes $\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} x\cos y \\ x\sin y \end{pmatrix}$ im Punkt $(0,0)$.

(b) [2 P] Berechnen Sie die Divergenz des Gradienten von $g(x,y) = x^{m+1}y^{n+1}$ im Punkt $(1,1)$

9. Aufgabe [6 Punkte]:

Gegeben sei die Funktion $\phi : \mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ mit $\phi(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^q$. Dabei sei $(x,y,z) \neq (0,0,0)$.

Für welche $q \in \mathbf{R}$ gilt

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}(x,y,z) = 0$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \setminus (0,0,0)$?