HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR THEORETISCHE BIOLOGIE

THEORETISCHE BIOLOGIE MODELLIERUNG

Prof. Hanspeter Herzel
Dr. Grigory Bordyugov
Sarah Lück

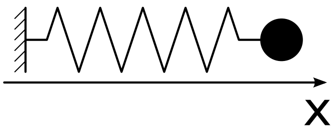
Vorlesung: Montag 08:30
Übung: Dienstag 18:00, ITB

12. Übung

Ausgabe: 20.1.14, Abgabe: 27.1.14, in der Vorlesung
Beschriften Sie bitte Ihre Abgabe mit Namen und Matrikelnummer

---

GEDÄMPFTE SCHWINGUNGEN



Ein Massepunkt (Masse m) sei an einer Feder (Federkonstante k) befestigt. Der Massepunkt könne sich nur horizontal entlang der x-Richtung bewegen, und der Koordinatenursprung $x = 0$ entspreche der Ruhelage des Massepunktes. Dazu sei γ der Koeffizient der Reibung zwischen dem Massepunkt und dem Boden. Aus dem Newtonschen Gesetz ergibt sich folgende Bewegungsgleichung für den Massepunkt:

$$mx'' + \gamma x' + kx = 0, \qquad ' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}. \tag{1}$$

Die Koordinate $x = x(t)$ bezeichnet die momentane Auslenkung des Massepunktes aus der Ruhelage.

(a) Löse die Bewegungsgleichung mit dem Ansatz $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$ und bestimme den Charakter von den Exponenten λ (reell, imaginär oder komplex-konjugiert) in Abhängigkeit von den Parametern m, γ und k. Skizziere drei qualitativ unterschiedliche zeitliche Verläufe von $x(t)$.

(b) Führe eine neue Variable $v(t) = x'(t)$ (die momentane Geschwindigkeit des Massepunktes) ein und forme die obige Bewegungsgleichung (1) in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung für den Vektor $\begin{pmatrix} x'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix}$ um. Stelle das Differentialgleichungssystem in der Matrixform auf. Bestimme die Eigenwerte der resultierenden Matrix und vergleiche diese mit dem Ergebnis für λ aus (a).

(c) Sei nun

$$E(x(t), v(t)) = \underbrace{\frac{1}{2} k x^2(t)}_{E_{\text{pot}}} + \underbrace{\frac{1}{2} m v^2(t)}_{E_{\text{kin}}}$$

die Gesamtenergie des Schwingers. Mithilfe der Kettenregel für die totale Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}E\left(x\left(t\right),v\left(t\right)\right)}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial E}{\partial x}x'+\frac{\partial E}{\partial v}v'$$

zeige, daß $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\leq 0$ für alle t, i.e., die Energie des Schwingers fast immer abnimmt. *Hinweis:* Benutze die entsprechenden rechten Seiten des Differentialgleichungssystems aus Aufgabe (b) für die Ausdrücke für x' bzw. v'.

(d) Diskutiere den Fall erhaltener Energie $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=0$: mit welchen Parametern ist das möglich für alle Zeitpunkte?