HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR THEORETISCHE BIOLOGIE

Theoretische Biologie Modellierung

Prof. Hanspeter Herzel
Dr. Pål O. Westermark
Adrián E. Granada
Dr. Grigory Bordyugov
Prof. Avidan U. Neumann
Dr. Michal Or-Guil

Vorlesung: Montag 08:15
Übung: Mittwoch 16:00, ITB

10. Übung **Ausgabe: 10.1.11, Abgabe: 17.1.11, in der Vorlesung**

Beschriften Sie bitte Ihre Abgabe mit Namen und Matrikelnummer

---

Komplexe Zahlen: Die Eulersche Formel

In dieser Aufgabe wird die Eulersche Formel

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

bewiesen. Dabei sei $f(x) = e^{ix}$ und sei $g(x) = \cos x + i \sin x$ und i ist die imaginäre Einheit: $i^2 = -1$.

(a) Zeige, daß $f(0) = g(0)$.

(b) Berechne die Ableitungen $f'(x)$ und $g'(x)$. Dabei bezeichnet der $'$-Strich die Ableitung nach der Variablen x.

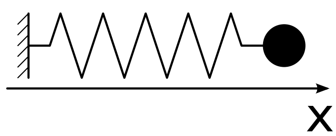
(c) Mithilfe der Quotientenregel

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

zeige, daß $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = 0$ für alle x.

(d) Begründe, warum aus den Ergebnissen von (a) und (c) die gewünschte Identität $f(x) = g(x)$ folgt.

Gedämpfte Schwingungen



Ein Massepunkt (Masse m) sei an einer Feder (Federkonstante k) befestigt. Der Massepunkt könne sich nur horizontal entlang der x-Richtung bewegen, und der Koordinatenursprung $x = 0$ entspreche der Ruhelage des Massepunktes. Dazu sei γ der Koeffizient der Reibung zwischen dem Massepunkt und dem Boden. Aus dem Newtonschen Gesetz ergibt sich folgende Bewegungsgleichung für den Massepunkt:

$$mx'' + \gamma x' + kx = 0, \qquad ' = \frac{d}{dt}. \tag{1}$$

Die Koordinate $x = x(t)$ bezeichnet die momentane Auslenkung des Massepunktes aus der Ruhelage.

(a) Löse die Bewegungsgleichung mit dem Ansatz $x(t) = x_0 \mathrm{e}^{\lambda t}$ und bestimme den Charakter von den Exponenten λ (reell, imaginär oder komplex-konjugiert) in Abhängigkeit von den Parametern m, γ und k. Skizziere drei qualitativ unterschiedliche zeitliche Verläufe von $x(t)$.

(b) Führe eine neue Variable $v(t) = x'(t)$ (die momentane Geschwindigkeit des Massepunktes) ein und forme die obige Bewegungsgleichung (1) in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung für den Vektor $\begin{pmatrix} x'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix}$ um. Stelle das Differentialgleichungssystem in der Matrixform auf. Bestimme die Eigenwerte der resultierenden Matrix und vergleiche diese mit dem Ergebnis für λ aus (a).

(c) Sei nun

$$E(x(t), v(t)) = \underbrace{\frac{1}{2} k x^2(t)}_{E_{\mathrm{pot}}} + \underbrace{\frac{1}{2} m v^2(x)}_{E_{\mathrm{kin}}}$$

die Gesamtenergie des Schwingers. Mithilfe der Kettenregel für die totale Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}E(x(t), v(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial E}{\partial x} x' + \frac{\partial E}{\partial v} v'$$

zeige, daß $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \le 0$ für alle t, i.e., die Energie des Schwingers fast immer abnimmt.
Hinweis: Benutze die entsprechenden rechten Seiten des Differentialgleichungssystems aus Aufgabe (b) für die Ausdrücke für x' bzw. v'.

(d) Diskutiere den Fall erhaltener Energie $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0$: mit welchen Parametern ist das möglich für alle Zeitpunkte?