HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR THEORETISCHE BIOLOGIE

**Theoretische Biologie Modellierung**

Prof. Hanspeter Herzel
Dr. Pål O. Westermark
Adrián E. Granada
Dr. Grigory Bordyugov
Prof. Avidan U. Neumann
Dr. Michal Or-Guil

Vorlesung: Montag 08:15
Übung: Mittwoch 16:00, ITB

**9. Übung** **Ausgabe: 3.1.11, Abgabe: 10.1.11, in der Vorlesung**
*Beschriften Sie bitte Ihre Abgabe mit Namen und Matrikelnummer*

---

**Numerische Integrationsverfahren**
Betrachten Sie folgende Differentialgleichung für die Funktion $x(t)$ mit der Anfangsbedingung:

$$\dot{x} = f(x), \qquad x(t=0) = 1,$$

wobei $f(x) = -x$. Das Hauptziel folgender Aufgaben besteht darin, den Wert $x(t=1)$ mithilfe verschiedener numerischer Integrationsverfahren zu ermitteln und diesen mit dem analytisch bekannten Wert zu vergleichen.

(a) *Das Euler-Verfahren.* Aus der Approximation

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \approx \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \qquad \Delta t \text{ ist klein, aber endlich,}$$

ergibt sich *das explizite Euler-Integrationsverfahren*:

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \Delta t \cdot f(x(t)).$$

Mithilfe des Taschenrechners bzw. Computers führen Sie einzelne Schritte dieses Verfahrens aus und berechnen Sie $x(t=1)$ mit drei verschiedenen Schrittgrößen $\Delta t = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$.

*NB:* Die Anzahl der einzelnen Euler-Schritte, die Sie brauchen, um den Wert $x(t=1)$ zu berechnen, hängt von der Wahl von $\Delta t$ ab!

(b) *Die Midpoint-Methode.* Hierbei wird das Euler-Verfahren durch einen zusätzlichen "halben Schritt" verbessert: die Ableitung $f(x)$ wird an der Zwischenstelle $x(t+\Delta t/2)$ ausgerechnet. Den $x$-Wert an der Zwischenstelle gewinnt man anhand des einfachen Euler-Schrittes mit der Schrittgrösse von $\Delta t/2$. Das resultiert in folgender Formel:

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \Delta t \cdot f\underbrace{\left(x + \frac{\Delta t}{2} f(x(t))\right)}_{x(t+\Delta t/2)}.$$

Berechnen Sie $x(t=1)$ mithilfe des Midpoint-Verfahrens mit $\Delta t = \frac{1}{2}$ und vergleichen Sie dieses mit den Ergebnissen der Euler-Methode.

(c) *Die Runge-Kutta Methode 4. Ordnung* stellt eine weitere Verbesserung der obigen Verfahren dar. Der Einzelschritt dieses Verfahrens lautet:

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \Delta t \cdot \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6},$$

wobei

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x(t)), \\ k_2 &= f\left(x(t) + \frac{\Delta t}{2} k_1\right), \\ k_3 &= f\left(x(t) + \frac{\Delta t}{2} k_2\right), \\ k_4 &= f(x(t) + \Delta t k_3). \end{aligned}$$

Berechnen Sie $x(t=1)$ mithilfe dieses Verfahrens mit $\Delta t = \frac{1}{2}$.

Machen Sie sich klar, welche Bedeutung die Koeffizienten $k_{1,2,3,4}$ haben.

(d) Vergleichen Sie die Ergebnisse aller drei Methoden mit dem analytisch bekannten Wert $x(t=1)$.