HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
INSTITUT FÜR THEORETISCHE BIOLOGIE

Theoretische Biologie Modellierung

Prof. Hanspeter Herzel
Dr. Grigory Bordyugov

Vorlesung: Montags 08:15 Uhr
Übung : Mittwochs 13:00 Uhr

8. Übung **Ausgabe: 12.12.11, Abgabe: 2.1.12, in der Vorlesung**
Beschriften Sie bitte Ihre Abgabe mit Namen und Matrikelnummer

---

Numerische Integrationsverfahren
Betrachte folgende Differentialgleichung für die Funktion $x(t)$ mit der Anfangsbedingung:

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = f(x), \qquad x(t=0) = 1,$$

wobei $f(x) = -x$. Das Hauptziel folgender Aufgaben besteht darin, den Wert $x(t=1)$ mithilfe verschiedener numerischer Integrationsverfahren zu ermitteln und diesen mit dem analytisch bekannten Wert zu vergleichen.

(a) *Das Euler-Verfahren.* Aus der Approximation

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \approx \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \qquad \Delta t \text{ ist klein, aber endlich,}$$

ergibt sich *das explizite Euler-Integrationsverfahren*:

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \Delta t \cdot f(x(t)).$$

Mithilfe des Taschenrechners bzw. Computers führe einzelne Schritte dieses Verfahrens aus und berechne $x(t=1)$ mit drei verschiedenen Schrittweiten $\Delta t = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$.

NB: Die Anzahl der einzelnen Euler-Schritte, um den Wert $x(t=1)$ zu berechnen, hängt von der Wahl von Δt ab!

(b) *Die Midpoint-Methode.* Hierbei wird das Euler-Verfahren durch einen zusätzlichen "halben Schritt" verbessert: die Ableitung $f(x)$ wird an der Zwischenstelle $x(t+\Delta t/2)$ ausgerechnet. Den x-Wert an der Zwischenstelle gewinnt man anhand des einfachen Euler-Schrittes mit der halben Schrittweite von $\Delta t/2$. Das resultiert in folgender Formel:

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \Delta t \cdot f\underbrace{\left(x + \frac{\Delta t}{2} f(x(t))\right)}_{x(t+\Delta t/2)}.$$

Berechne $x(t=1)$ mithilfe des Midpoint-Verfahrens mit $\Delta t = \frac{1}{2}$ und vergleiche dieses mit den Ergebnissen der Euler-Methode.

(c) *Die Runge-Kutta Methode 4. Ordnung* stellt eine weitere Verbesserung der obigen Verfahren dar. Der Einzelschritt dieses Verfahrens lautet:

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \Delta t \cdot \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6},$$

wobei

$$k_1 = f(x(t)), \qquad k_2 = f\left(x(t) + \frac{\Delta t}{2} k_1\right), \qquad k_3 = f\left(x(t) + \frac{\Delta t}{2} k_2\right), \qquad k_4 = f(x(t) + \Delta t k_3).$$

Berechne $x(t=1)$ mithilfe dieses Verfahrens mit $\Delta t = \frac{1}{2}$.

Mache dir klar, welche Bedeutung die Koeffizienten $k_{1,2,3,4}$ haben.

(d) Vergleiche die Ergebnisse aller drei Methoden mit dem analytisch bekannten Wert $x(t=1)$.