

Theoretische Biologie Modellierung

Prof. Hanspeter Herzel
Dr. Grigory Bordyugov

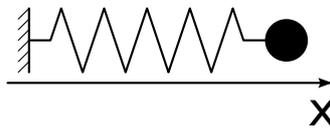
Vorlesung: Montags 08:15 Uhr
Übung : Mittwochs 13:00 Uhr

10. Übung

Abgabe: 23.1.12, in der Vorlesung

Beschriften Sie bitte Ihre Abgabe mit Namen und Matrikelnummer

Gedämpfte Schwingungen



Ein Massepunkt (Masse m) sei an einer Feder (Federkonstante k) befestigt. Der Massepunkt könne sich nur horizontal entlang der x -Richtung bewegen, und der Koordinatenursprung $x = 0$ entspreche der Ruhelage des Massepunktes. Dazu sei γ der Koeffizient der Reibung zwischen dem Massepunkt und dem Boden. Aus dem Newtonschen Gesetz ergibt sich folgende Bewegungsgleichung für den Massepunkt:

$$mx'' + \gamma x' + kx = 0, \quad ' = \frac{d}{dt}. \quad (1)$$

Die Koordinate $x = x(t)$ bezeichnet die momentane Auslenkung des Massepunktes aus der Ruhelage.

- Löse die Bewegungsgleichung mit dem Ansatz $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$ und bestimme den Charakter von den Exponenten λ (reell, imaginär oder komplex-konjugiert) in Abhängigkeit von den Parametern m, γ und k . Skizziere drei qualitativ unterschiedliche zeitliche Verläufe von $x(t)$.
- Führe eine neue Variable $v(t) = x'(t)$ (die momentane Geschwindigkeit des Massepunktes) ein und forme die obige Bewegungsgleichung (1) in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung für den Vektor $\begin{pmatrix} x'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix}$ um. Stelle das Differentialgleichungssystem in der Matrixform auf. Bestimme die Eigenwerte der resultierenden Matrix und vergleiche diese mit dem Ergebnis für λ aus (a).

(c) Sei nun

$$E(x(t), v(t)) = \underbrace{\frac{1}{2} k x^2(t)}_{E_{\text{pot}}} + \underbrace{\frac{1}{2} m v^2(t)}_{E_{\text{kin}}}$$

die Gesamtenergie des Schwingers. Mithilfe der Kettenregel für die totale Ableitung

$$\frac{dE(x(t), v(t))}{dt} = \frac{\partial E}{\partial x} x' + \frac{\partial E}{\partial v} v'$$



zeige, daß $\frac{dE}{dt} \leq 0$ für alle t , i.e., die Energie des Schwingers fast immer abnimmt.

Hinweis: Benutze die entsprechenden rechten Seiten des Differentialgleichungssystems aus Aufgabe (b) für die Ausdrücke für x' bzw. v' .

- (d) Diskutiere den Fall erhaltener Energie $\frac{dE}{dt} = 0$: mit welchen Parametern ist das möglich für alle Zeitpunkte?