



THEORETISCHE BIOLOGIE MODELLIERUNG

Prof. Hanspeter Herzel
Dr. Grigory Bordyugov
Sarah Lück

Vorlesung: Montag 8:15
Übung: Mittwoch 8:15

8. Übung

Ausgabe: 7.12.15, Abgabe: 14.12.15, in der Vorlesung
Beschriften Sie bitte Ihre Abgabe mit Namen und Matrikelnummer

KONKURRIERENDE BAKTERIENSTÄMME

Betrachte ein System mit zwei konkurrierenden Bakterienstämmen:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(1-x-y), \\ \frac{dy}{dt} &= y(2-y-x).\end{aligned}$$

- Interpretiere die verschiedenen Terme dieses Differentialgleichungssystems.
- Bestimme die Nullklinen für x und y und zeichne sie im Phasenraum.
- Welche Fixpunkte hat das Gesamtsystem? Welche Fixpunkte sind instabil?
- Zeichne charakteristische Trajektorien in den Phasenraum.

IMAGINÄRE EXPONENTENTIALFUNKTION UND EULERSCHE FORMEL

Eine Taylorreihe einer Funktion f ist die Näherung dieser Funktion durch deren Ableitungen. Dabei wird die Funktion in eine Potenzreihe in der Umgebung einer Stelle entwickelt. Je mehr Glieder diese Potenzreihe hat, desto genauer wird die Funktion dargestellt. Die allgemeine Taylorentwicklung einer Funktion um die Stelle a lautet

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(x)}{1!} (x-a) + \frac{f''(x)}{2!} (x-a)^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}}{k!} (x-a)^k$$

Dabei bezeichnet $f^{(k)}$ die k -te Ableitung von f und $k! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k$ die Fakultät von k . Die Taylorreihen der Exponentialfunktion, der Sinus-Funktion und der Cosinus-Funktion lauten:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \sin \phi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \phi^{2k+1} \quad \text{und} \quad \cos \phi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \phi^{2k}.$$



- (a) Betrachte eine imaginäre Exponentialfunktion, indem $x = i\phi$ eingesetzt wird. Wie lauten die ersten 6 Glieder der Taylorentwicklung?
- (b) Bilde auch die ersten 6 Glieder der Sinus- und Cosinus-Taylorentwicklung.
- (c) Überprüfe mit den Taylorentwicklungen, ob die Eulersche Formel

$$e^{i\phi} = \cos(\phi) + i \sin(\phi)$$

hier gilt.

- (d) Um welche Stelle werden die Exponential-, die Sinus- und die Cosinus-Funktion als Taylorreihe entwickelt.