Wiederholung Kapitel 13
Differentialgleichungen (DGL)

DGL: Verknüpfung einer Funktion $x(t)$
und ihrer Ableitung

z. B.: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\,x(t) = f\left(x(t)\right)\cdot g(t) + h(t)$

<u>abhängige</u> Variable : x

<u>unabhängige</u> Variable : t

<u>Lineare</u> DGL:
Nur lineare Terme der abhängigen Variable und ihren Ableitungen treten auf

z. B.: $\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = t^2\,x$

z. B.: $a_n\,\frac{\mathrm{d}^n\,x}{\mathrm{d}\,t^n} + a_{n-1}\,\frac{\mathrm{d}^{n-1}\,x}{\mathrm{d}\,t^{n-1}} + \ldots\, a_1\,\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} + x\,a_0 = b$

mit konstanten Koeffizienten $a_n\,,\, a_{n-1}\,,\,\ldots\,,\, a_{1,}\, a_{0,}\, b$

<u>Nichtlineare</u> DGL:

z. B.: $\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = -x^2$ oder $\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = \sqrt{x}$ oder $\left(\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}\right)^3 = x + 1$

<u>Ordnung</u> einer DGL:
Grad der höchsten Ableitung der abhängigen Variable

z. B. DGL 3. Ordnung : $\frac{\mathrm{d}^3\,x}{\mathrm{d}\,t^3} + \left(\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}\right)^5 = 0$

Beispiele von DGL und deren *allgemeine* Lösungen:

$$\frac{\mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, x} = a \quad \underset{\text{Integration}}{\Rightarrow} \quad y(x) = a\, x + b$$

Freier Fall :

$$\frac{\mathrm{d}^2\, x}{\mathrm{d}\, t^2} = g \quad \underset{\text{Integration}}{\Rightarrow} \quad x(t) = \frac{1}{2}\, g\, t^2 + v_0\, t + x_0$$

Feder :

$$m\, \frac{\mathrm{d}^2\, x}{\mathrm{d}\, t^2} = -k\, x \quad \underset{\text{Exp.}-\mathit{Ansatz}}{\Rightarrow} \quad x(t) = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t\right)$$

Zerfall :

$$\frac{\mathrm{d}\, C}{\mathrm{d}\, t} = -\alpha\, C \quad \underset{\text{Exp.}-\mathit{Ansatz}}{\Rightarrow} \quad C(t) = C_0 \exp(-\alpha\, t)$$

Bimol. Zerfall :

$$\frac{\mathrm{d}\, C}{\mathrm{d}\, t} = -\gamma\, C^2 \quad \underset{\text{Tr. } \mathit{d.\ Var.}}{\Rightarrow} \quad C(t) = \frac{1}{\frac{1}{C_0} + \gamma\, t}$$

Anfangsbedingungen legen die Konstanten
b, v_0, x_0, C_1, C_2, C_0 fest.

=> *spezielle* Lösungen der DGL

Wiederholung Kapitel 13
Qualitative Analyse einer (nichtlinearen) DGL

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\,x(t) = f\left(x(t)\right)$$

<u>Voraussetzungen</u>
für die qualitative Analyse einer DGL:
- **„Erste Ordnung“**
- **„Eindimensional“**: nur eine abh. Variable x
- **„Gewöhnlich“**: nur eine unabh. Variable t
- **„Autonom“**: t tritt nicht <u>*explizit*</u> auf

<u>Qualitatives Verhalten</u> von Lösungen $x(t)$ der DGL
- $x(t)$ wächst für $f(x) > 0$
- $x(t)$ fällt für $f(x) < 0$
- $x(t)$ bleibt konstant für $f(x) = 0$ (stationäre Lsg.)

<u>Stationäre Lösung</u>
Sei x^* Nullstelle von $f(x)$, also $f(x^*) = 0$, so ist
$x(t) = x^*$ eine stationäre Lösung.

<u>Stabilität einer stationären Lösung</u>
- x^* ist asymptotisch stabil für $f'(x^*) < 0$
- x^* ist instabil für $f'(x^*) > 0$

=> alle Lösungen sind monoton
=> keine Oszillationen

<u>Gewöhnliche</u> DGL: nur eine unabhängige Variable

z. B. : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\,x(t) = f\left(x(t)\right)\cdot g(t) + h(t)$

<u>Partielle</u> DGL: mehrere unabhängige Variablen

z.B. Diffusionsgleichung
(Wärmeleitung, Nervenleitung, Wellen, ...)

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\rho(x, y, z, t) = D\cdot\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2}\right)$$

<u>Gekoppelte</u> DGL: mehrere abhängige Variablen

z.B. Räuber (x) -Beute (y) Systeme

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = \alpha\cdot x - \beta\cdot x\cdot y$$
$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} = \gamma\cdot x\cdot y - \delta\cdot y$$

Einfache Gewöhnliche Differentialgleichungen - Lösungsstrategien

1. Ordnung

Lineare DGLn: $\frac{d}{dt}x(t) = g(t)x(t) + h(t)$ h(t) $\neq$ 0 $\Rightarrow$ „inhomogen"

hom. $\Rightarrow$ Variablen-separation: $\int_{x(t_0)}^{x(t_1)} \frac{1}{x}\, dx = \int_{t_0}^{t_1} g(t)dt \quad \Rightarrow \quad x(t_1) = x(t_0) \exp\left[\int_{t_0}^{t_1} g(t)dt\right]$

inhom. $\Rightarrow$ "Variation der Konstanten": Ansatz: $x(t) = z(t)x_h(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}z(t) = \frac{h(t)}{x_h(t)}$

Nichtlineare DGLn: $\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t))g(t)$

Separation der Variablen: $\int_{x(t_0)}^{x(t_1)} \frac{1}{f(x)}\, dx = \int_{t_0}^{t_1} g(t)dt$

Falls 1 / f(x) nicht integrierbar: Qualitative Analyse & Stabilität stationärer Lösungen

---

2. Ordnung

Beispiel einer Linearen DGL: (Schwingungsgleichung) $m\frac{d^2}{dt^2}x(t) + \gamma\frac{d}{dt}x(t) = -kx(t)$

Exponentialansatz: $x(t) = e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad m\lambda^2 + \gamma\lambda + k = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = \ldots$

Mathe-Skript, S. 195:

Satz (Superpositionsprinzip):
Seien $x_1(t)$ und $x_2(t)$ zwei Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung (14.3),

$$\frac{d}{dt}x(t) = g(t)x(t) \ .$$

Dann ist auch jede Linearkombination $y(t)$ von $x_1(t)$ und $x_2(t)$,

$$y(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \quad \text{mit } \alpha, \beta \in \mathbf{C}$$

eine Lösung von (14.3).

Beweis:
Nach der Voraussetzung des Satzes wird (14.3) von $x_1(t)$ und $x_2(t)$ erfüllt. Will man also überprüfen, ob dies auch für $y(t)$ zutrifft, so berechne man $\frac{d}{dt}y(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y(t) &= \alpha\frac{d}{dt}x_1(t) + \beta\frac{d}{dt}x_2(t) \\ &= \alpha g(t)x_1(t) + \beta g(t)x_2(t) \\ &= g(t)[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] = g(t)y(t) \ . \end{aligned} \tag{14.4}$$

Die Linearkombination $y(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ erfüllt also in der Tat (14.3). □

Beispiel (Zerfall): $\dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} = -C \quad \Rightarrow \quad C(t) = k \exp(-t)$

Lösung 1 mit $k = 2$: $\qquad C_1(t) = 2\exp(-t)$

Lösung 2 mit $k = 3$: $\qquad C_2(t) = 3\exp(-t)$

Linearkombination der beiden Lösungen:

$$C_3(t) = \alpha\, C_1(t) + \beta\, C_2(t) = \underbrace{(2\alpha + 3\beta)}_{k'} \exp(-t)$$

Beispiel :

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = -x(t) + 2$$

Lösung über Variation der Konstanten mit dem Ansatz $x(t) = z(t)\,x_h(t)$

1) $x_h(t) = \exp(-t)$ eine spez. Lsg. der hom. DGL

2) $z(t) = 2\exp(t) + z_0$

$\Rightarrow x(t) = 2 + z_0 \exp(-t)$ allgemeine Lösung

Satz:
Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $\frac{d}{dt}x(t) = g(t)x(t) + h(t)$ kann immer als Summe einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung und der allgemeinen Lösung der zugeordneten homogenen Differentialgleichung $\frac{d}{dt}x(t) = g(t)x(t)$ geschrieben werden.

Mathe-Skript, S. 201

Lösung des Beispiels über den Satz mit dem Ansatz $x(t) = x_h(t) + x_{sp}(t)$

1) $x_h(t) = k\exp(-t)$ allg. Lsg. der hom. DGL

2) $x_{sp}(t) = 2$ spez. Lsg. der inh. DGL (stationäre Lsg.)

$\Rightarrow x(t) = 2 + k\exp(-t)$ allgemeine Lösung

Gedämpfter harmonischer Oszillator

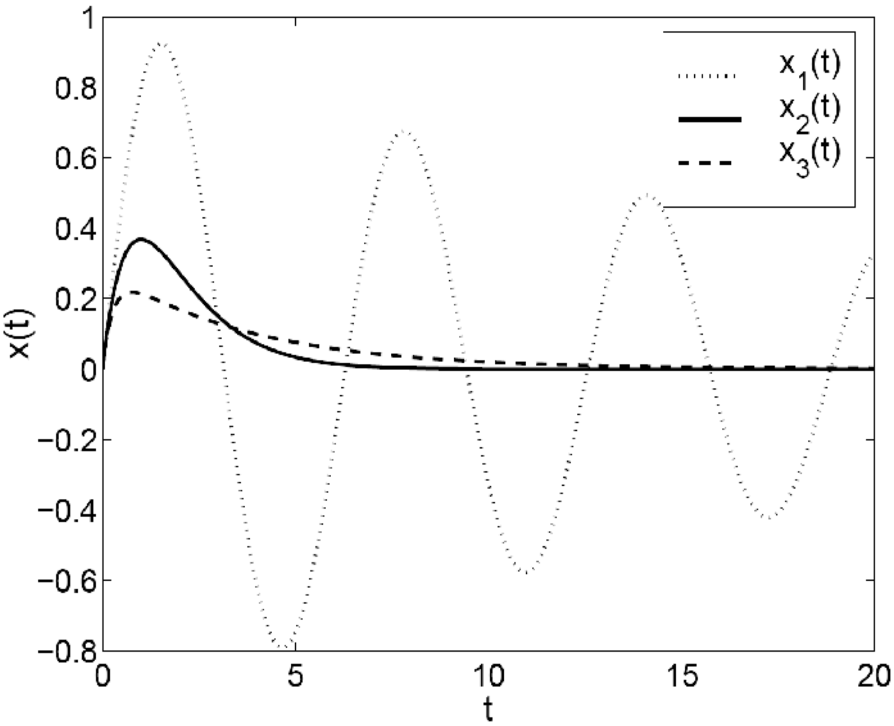
$$m \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\, t^2} + \gamma \frac{\mathrm{d}\, x}{\mathrm{d}\, t} + k\, x = 0$$

$m > 0$ Masse
$\gamma > 0$ Dämpfung
$k > 0$ Federkonstante
$D = \gamma^2 - 4\, m\, k$ Diskriminante

1.Fall : $\gamma^2 < 4\, m\, k \Rightarrow D < 0$ (unterkritische Dämpfung)
2.Fall : $\gamma^2 = 4\, m\, k \Rightarrow D = 0$ (aperiodischer Grenzfall)
3.Fall : $\gamma^2 > 4\, m\, k \Rightarrow D > 0$ (starke Dämpfung)

<u>Beispiel</u> $(m = 1,\ k = 1)$

Anfangsbedingungen : $x\,(0) = 0,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}\, x\,(0) = 1$



Mathe-Skript, Abb. 14.3, S. 205

Beispiel (Gedämpfter harmonischer Oszillator)

$$m \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\,t^2} + \gamma \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} + k\,x = 0$$

Exponentialansatz: $x(t) = \exp(\lambda\,t)$

$$\Rightarrow \lambda_{1/2} = \frac{1}{2\,m}\left(-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\,m\,k}\right) \text{ , also}$$

$$x_1(t) = \exp(\lambda_1\,t) \text{ und } x_2(t) = \exp(\lambda_2\,t)$$

Allgemeine Lösung: $x(t) = C_1\,x_1(t) + C_2\,x_2(t)$

1.Fall : $\gamma^2 < 4\,m\,k \Rightarrow D < 0$ (unterkritische Dämpfung)

$\lambda_1 = -\alpha + i\,\omega$ und $\lambda_2 = -\alpha - i\,\omega$

mit $\alpha = \dfrac{\gamma}{2\,m}$ und $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m} - \left(\dfrac{\gamma}{2\,m}\right)^2}$

<u>Beispiel</u> : $m = 1$ kg , $\gamma = 0.1$ kg/s , $k = 1$ kg/s^2 = 1 N/m

$$\Rightarrow \alpha = 0.05\,\frac{1}{\mathrm{s}}, \quad \omega \approx 1\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

Anfangsbedingungen: I) $x(0) = 0$

II) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\,x(0) = 1\text{ m/s} = v_0$

I) $C_1\,\underbrace{x_1(0)}_{1} + C_2\,\underbrace{x_2(0)}_{1} = 0 \qquad \Rightarrow C_1 = -C_2$

II) $C_1(-\alpha + i\,\omega)\cdot 1 + C_2(-\alpha - i\,\omega)\cdot 1 = v_0$

I in II) $\alpha(-C_1 + C_1) + i\,\omega(C_1 + C_1) = v_0 \qquad \Rightarrow C_1 = \dfrac{-i}{2\,\omega}\,v_0$

in I) $C_2 = \dfrac{+i}{2\,\omega}\,v_0$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{-i\,v_0}{2\,\omega}\exp(-\alpha\,t)\exp(i\,\omega\,t) + \frac{i\,v_0}{2\,\omega}\exp(-\alpha\,t)\exp(-i\,\omega\,t) =$$

$$= \frac{-i\,v_0}{2\,\omega}\exp(-\alpha\,t)\underbrace{[\exp(i\,\omega\,t) - \exp(-i\,\omega\,t)]}_{2\,i\sin(\omega\,t)} =$$

$$= \frac{v_0}{\omega}\exp(-\alpha\,t)\sin(\omega\,t) =$$

$$= 1\text{ m}\cdot\exp\left(-0.05\,\frac{1}{\mathrm{s}}\cdot t\right)\sin\left(1\,\frac{1}{\mathrm{s}}\cdot t\right)$$

Kapitel 16: Matrizen

Definition (Matrix):
Eine **m×n Matrix** A ist ein geordnetes Schema mit m **Zeilen** und n **Spalten**.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} . \qquad (16.1)$$

Die Größen a_{ij} heißen **Elemente** der Matrix **A**. Statt a_{ij} schreibt man auch $(\mathbf{A})_{ij}$.

Mathe-Skript, S. 221

Definition (Hauptdiagonale):
Die Elemente $(\mathbf{A})_{ii}$ heißen **Hauptdiagonalelemente** der Matrix **A** und bilden zusammen die **Hauptdiagonale** der Matrix.

Mathe-Skript, S. 222

Hauptdiagonalelemente $(\mathbf{A})_{ii} = a_{ii}$ für $i = 1, \dots, n$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \boldsymbol{a_{22}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & \boldsymbol{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

Definition (Untermatrix):
Streicht man Zeilen und/oder Spalten aus **A**, so verbleibt eine kleinere Matrix. Alle diese Matrizen werden **Untermatrizen von A** genannt.

Transposition von Matrizen

Vertauschen von Zeilen und Spalten : $(\mathbf{A}^T)_{ij} = (\mathbf{A})_{ji}$

$$\text{Matrix:} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\mathrm{n}} \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{m-1,n} \\ a_{m1} & \cdots & a_{m,n-1} & a_{m\ n} \end{pmatrix}$$

$$\text{Transponierte Matrix:} \quad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{m,n-1} \\ a_{1\mathrm{n}} & \cdots & a_{m-1,n} & a_{m\ n} \end{pmatrix}$$

Zeilenvektor ($1 \times m$ -Matrix): $\mathbf{D} = \left(d_{11}, d_{21}, \ldots, d_{m1} \right)$

$$\text{Spaltenvektor (} m \times 1 \text{ -Matrix):} \quad \mathbf{D}^T = \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ \vdots \\ d_{m1} \end{pmatrix}$$

Quadratische Matrizen ($n \times n$)
(Zeilenzahl ist gleich der Spaltenzahl)

Symmetrische Matrix:

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{A})_{ij} = (\mathbf{A})_{ji} \quad \text{für } 1 \le i \le n \text{ und } 1 \le j \le n$$

$$\text{Beispiele}: \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -7 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Obere Dreiecksmatrix:

$$(\mathbf{A})_{ij} = 0 \quad \text{für } i > j$$

$$\text{Beispiele}: \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Untere Dreiecksmatrix:

$$(\mathbf{A})_{ij} = 0 \quad \text{für } i < j$$

$$\text{Beispiele}: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalmatrix:

$$a_{ij} = (\mathbf{A})_{ij} = 0 \quad \text{für } i \ne j$$

$$\text{Beispiele}: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Besondere, quadratische $n \times n$ -Matrizen

(Zeilenzahl = Spaltenzahl)

Einheitsmatrix **E**:

$$a_{ij} = (\mathbf{A})_{ij} = 1 \quad \text{für } i = j \quad \text{und} \quad a_{ij} = (\mathbf{A})_{ij} = 0 \quad \text{für } i \neq j$$

$$\mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nullmatrix **O**:

$$a_{ij} = (\mathbf{A})_{ij} = 0 \quad \text{für alle } i, \ j$$

$$\mathbf{O}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{O}_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrix-Multiplikation: C = BA

$n \times l$ -Matrix **C** $\qquad$ $n \times m$ -Matrix **B** $\qquad$ $m \times l$ -Matrix **A**

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & & \cdots & c_{11} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ & & \boldsymbol{c_{ki}} & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & & \cdots & c_{nl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{b_{k1}} & \boldsymbol{b_{k2}} & \boldsymbol{\cdots} & \boldsymbol{b_{km}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \boldsymbol{a_{1i}} & \cdots & a_{11} \\ \vdots & \vdots & \boldsymbol{a_{2i}} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \boldsymbol{\vdots} & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \boldsymbol{a_{mi}} & \cdots & a_{ml} \end{pmatrix}$$

Berechnung des Elements $\boldsymbol{c_{ki}}$ in der
k-ten Zeile und der *i*-ten Spalte der Matrix **C**

$$\boldsymbol{c_{ki}} = \boldsymbol{b_{k1}}\, \boldsymbol{a_{1i}} + \boldsymbol{b_{k2}}\, \boldsymbol{a_{2i}} + \cdots + \boldsymbol{b_{km}}\, \boldsymbol{a_{mi}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{b_{kj}}\, \boldsymbol{a_{ji}} =$$

$$= \text{Zeile } \boldsymbol{k} \times \text{Spalte } \boldsymbol{i}$$

Matrix-Multiplikation: Beispiele

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{A\,B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{O}_2$, aber daraus folgt NICHT $\mathbf{A} = \mathbf{O}_2$ oder $\mathbf{B} = \mathbf{O}_2$

$\mathbf{B\,A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{B}$, aber daraus folgt NICHT $\mathbf{A} = \mathbf{E}_2$

$\Rightarrow \quad \mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$

Allgemeiner: aus $\mathbf{CD} = \mathbf{CF}$ folgt NICHT $\mathbf{D} = \mathbf{F}$

$\mathbf{A^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{A}$, aber $\mathbf{A} \neq \mathbf{E}_2$

$\mathbf{B^2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{O}_2$, aber $\mathbf{B} \neq \mathbf{O}_2$

Matrix-Multiplikation: Rechenregeln

(Mathe-Skript, S. 236)

<u>Wie bisher für reelle Zahlen:</u>

$\mathbf{A}\,(\mathbf{B}\,\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\,\mathbf{B})\,\mathbf{C}$ Assoziativität

$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\,\mathbf{C} = \mathbf{A}\,\mathbf{C} + \mathbf{B}\,\mathbf{C}$ Distributivität

<u>Neu für Matrizen:</u>

$\mathbf{B}\,\mathbf{A} \neq \mathbf{A}\,\mathbf{B}$ in der Regel keine Kommutativität

$(\mathbf{B}\,\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^T\,\mathbf{B}^T$

Sei $\mathbf{A}$ eine $m \times n$ -Matrix :

$$\mathbf{E}_m\,\mathbf{A} = \mathbf{A} = \mathbf{A}\,\mathbf{E}_n$$

$$\mathbf{O}_m\,\mathbf{A} = \underbrace{\mathbf{O}}_{m \times n\text{-Matrix}} = \mathbf{A}\,\mathbf{O}_n$$

Nahrungskette in einem Ökosystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}}_{\text{2 Fleischfresser}} \leftarrow \mathbf{B} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix}}_{\text{3 Pflanzenfresser}} \leftarrow \mathbf{A} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}}_{\text{2 Pflanzenarten}}$$

Experimentelle Daten zur Beschreibung der Nahrungskette:

- Elemente b_{kj} der Matrix **B**: Anzahl der Tiere der Art T_j die von jedem Fleischfresser der Art F_k gefressen werden (pro Zeiteinheit)

$$F_1 = b_{11}\, T_1 + b_{12}\, T_2 + b_{13}\, T_3$$
$$F_2 = b_{21}\, T_1 + b_{22}\, T_2 + b_{23}\, T_3$$

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix}$$

- Elemente a_{ji} der Matrix **A**: Menge der Pflanzen der Art P_i die von jedem Pflanzenfresser der Art T_j gefressen werden (pro Zeiteinheit)

$$T_1 = a_{11}\, P_1 + a_{12}\, P_2$$
$$T_2 = a_{21}\, P_1 + a_{22}\, P_2$$
$$T_3 = a_{31}\, P_1 + a_{32}\, P_2$$

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$$

Frage: Welche Menge der Pflanzenart P_i frisst jeder Fleischfresser der Art F_k indirekt über die Tierarten T_1, T_2 und T_3?

Antwort:

$$c_{\mathrm{ki}} = b_{\mathrm{k1}}\, a_{\mathrm{1i}} + b_{\mathrm{k2}}\, a_{\mathrm{2i}} + b_{\mathrm{k3}}\, a_{\mathrm{3i}} = \sum_{j=1}^{3} b_{\mathrm{kj}}\, a_{\mathrm{ji}} \quad \text{weil}$$

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$$

Kapitel 18: Funktionen mehrerer Variabler

Definition (Funktionen mehrerer Variabler):
Eine Funktion $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ mit $\vec{x} \mapsto z = f(x_1, \ldots, x_n)$ heißt **skalare Funktion** der Variablen $x_1, \ldots, x_n$, oder auch **skalares Feld**.
Eine Funktion $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ mit $\vec{x} \mapsto \vec{z} = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$ heißt **vektorwertige Funktion** der Variablen $x_1, \ldots, x_n$, oder auch **Vektorfeld**.

Mathe-Skript, S. 258

Beispiele für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\vec{x} \to z = f(x_1, \ldots, x_n)$

1) Volumen V eines Quaders:

$V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $(x, y, z) \to V = x \cdot y \cdot z$

<u>Kurzform:</u> $V(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$

2) Oberfläche einer Kugel: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

$\Rightarrow z(x, y) = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ mit $x^2 + y^2 \leq R^2$

3) Raumzeitliche Konzentration eines Stoffes in einer Zelle:

$\rho(x, y, z, t)$

4) Ebene im $\mathbb{R}^3$: $a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 = b_1$

$$\Rightarrow x_1(x_2, x_3) = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12} x_2 - a_{13} x_3\right)$$

Beispiel für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Elektrisches Feld einer Punktladung Q am Ursprung $\vec{r}_0 = (0,0,0)$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad \text{mit} \quad \vec{r} = (x, y, z)$$

Beispiel: partielle Ableitungen von $f(x,y)=x\cdot y^2$

Notation: $f_x=\frac{\partial f}{\partial x}$, $\quad f_{xy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$, u.s.w.

$$f_y=2xy, \quad f_x=y^2$$

$$f_{xx}=0, \quad f_{xy}=2y, \quad f_{yx}=2y, \quad f_{yy}=2x$$

$$f_{yyy}=0, \quad f_{yyx}=2, \ldots$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2=y^4 \underbrace{\neq}_{\text{Wichtig!}} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \underbrace{(y^2)}_{u}}=\frac{\partial}{\partial \underbrace{(y^2)}_{u}}\left(x\cdot \underbrace{y^2}_{u}\right)=x \underbrace{\neq}_{\text{Wichtig!}} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2\text{x}$$

> **Satz von Schwarz** (ohne Beweis):
> Besitzt $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ stetige partielle Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y\ \partial x}$ dann existiert auch $\frac{\partial^2 f}{\partial x\ \partial y}$ und es gilt $\frac{\partial^2 f}{\partial y\ \partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\ \partial y}$.
> Der Satz gilt in gleicher Weise in höheren Dimensionen.

Mathe-Skript, S. 265

Taylorentwicklung

Eine Variable: $f(x) = \underbrace{\overbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}^{\text{Tangente an } x_0} + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2}_{\text{Parabel an } x_0} + \ldots$

Zwei Variablen: $f(x,y) = \ldots$
Ansatz: Potenzreihe in $(x-x_0)$ und $(y-y_0)$:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) \;=\; & c_{00} \\
& + c_{10}(x-x_0) + c_{01}(y-y_0) \\
& + c_{20}(x-x_0)^2 + c_{11}(x-x_0)(y-y_0) + c_{02}(y-y_0)^2 + \ldots
\end{aligned}
$$

Bestimmung der Koeffizienten c_{ij}, wobei $\vec{r} = (x, y)^T$ und $\vec{r}_0 = (x_0, y_0)^T$

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\vec{r}} &= c_{10} + 2c_{20}(x-x_0) + c_{11}(y-y_0) + \ldots \;\rightarrow\; \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\vec{r}_0} = c_{10} \\
\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\vec{r}} &= c_{01} + 2c_{02}(y-y_0) + c_{11}(x-x_0) + \ldots \;\rightarrow\; \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\vec{r}_0} = c_{01} \\
\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{\vec{r}} &= 2c_{20} + 6c_{30}(x-x_0) + 2c_{21}(y-y_0) + \ldots \;\rightarrow\; \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{\vec{r}_0} = 2c_{20} \\
\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right|_{\vec{r}} &= c_{11} + 2c_{21}(x-x_0) + 2c_{12}(y-y_0) + \ldots \;\rightarrow\; \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right|_{\vec{r}_0} = c_{11} \\
\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{\vec{r}} &= 2c_{02} + 2c_{12}(x-x_0) + 6c_{03}(y-y_0) + \ldots \;\rightarrow\; \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{\vec{r}_0} = 2c_{02}
\end{aligned}
$$

Wichtiges Ergebnis (Taylorentwicklung im $\mathbb{R}^2$):

$$
\begin{aligned}
f(x,y) \;=\; & f(x_0, y_0) \\
& + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\vec{r}_0} \cdot (x-x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\vec{r}_0} \cdot (y-y_0) \\
& + \frac{1}{2}\left[\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{\vec{r}_0} \cdot (x-x_0)^2 + 2\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right|_{\vec{r}_0} \cdot (x-x_0)(y-y_0) + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{\vec{r}_0} \cdot (y-y_0)^2 \right]
\end{aligned}
$$

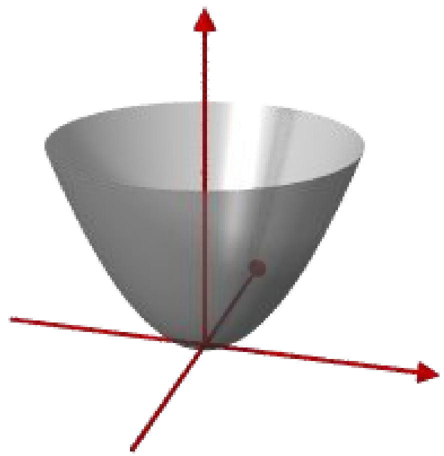
Beispiele

1) Elliptisches Paraboloid: $z = f(x,y) = x^2 + y^2$

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H}(\vec{r}_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det(\mathbf{H}) = 4 > 0$, $(\mathbf{H})_{11} > 0$, $(\mathbf{H})_{22} > 0 \Rightarrow$ lokales Mimimum



2) Hyperbolisches Paraboloid: $z = f(x,y) = x^2 - y^2$

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H}(\vec{r}_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \det(\mathbf{H}) = -4 < 0 \Rightarrow \text{Sattelpunkt}$$